

1 Kvantová mechanika - příklady

1.1 Tříhladinový stav

Zadání Částice se spinem 1 a magnetickým momentem μ se v čase $0 \leq t \leq T$ nachází v homogenním magnetickém poli indukce B , orientovaném podél osy z . Její hamiltonián je tedy

$$\hat{H} = -\mu B \hat{S}_z \quad (1)$$

\hat{S}_z je operátor projekce spinu do osy z . Vlastní vektory tohoto operátoru označíme jako

$$\hat{S}_z |\phi_1\rangle = 1 |\phi_1\rangle \quad \hat{S}_z |\phi_0\rangle = 0 |\phi_0\rangle \quad \hat{S}_z |\phi_{-1}\rangle = -1 |\phi_{-1}\rangle \quad (2)$$

Vlastní vektory operátoru projekce spinu do osy x \hat{S}_x označíme jako

$$\hat{S}_x |\chi_1\rangle = 1 |\chi_1\rangle \quad \hat{S}_x |\chi_0\rangle = 0 |\chi_0\rangle \quad \hat{S}_x |\chi_{-1}\rangle = -1 |\chi_{-1}\rangle \quad (3)$$

Platí

$$|\chi_1\rangle = \frac{1}{2} (|\phi_1\rangle + \sqrt{2} |\phi_0\rangle + |\phi_{-1}\rangle) \quad |\chi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle - |\phi_{-1}\rangle) \quad |\chi_{-1}\rangle = \frac{1}{2} (|\phi_1\rangle - \sqrt{2} |\phi_0\rangle + |\phi_{-1}\rangle) \quad (4)$$

Počáteční stav je

$$|\psi(t=0)\rangle = |\chi_1\rangle \quad (5)$$

Spočtete koncový stav $|\psi(t=T)\rangle$ a z něj pravděpodobnosti nalezení částice v čase $t=T$ ve stavech s projekcí spinu do osy x rovnou 1, 0 a -1 (tj. ve stavech $|\chi_1\rangle, |\chi_0\rangle, |\chi_{-1}\rangle$)

Moje řešení Hledáme vlastní hodnoty energie hamiltoniánu

$$\hat{H} |\phi_k\rangle = E_k |\phi_k\rangle \quad k = 1, 0, -1 \quad (6)$$

do této rovnice dosadíme hamiltonián z rovnice 1

$$-\mu B \hat{S}_z |\phi_k\rangle = E_k |\phi_k\rangle \quad k = 1, 0, -1 \quad (7)$$

a do této rovnice dosadíme vlastní hodnoty operátoru \hat{S}_z

$$-\mu B k |\phi_k\rangle = E_k |\phi_k\rangle \quad k = 1, 0, -1 \quad (8)$$

odtud

$$-\mu B k = E_k \quad k = 1, 0, -1 \quad (9)$$

tj.

$$E_1 = -\mu B \quad E_0 = 0 \quad E_{-1} = \mu B \quad (10)$$

Časový vývoj vlastních stavů operátoru \hat{S}_z je

$$e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} |\phi_k\rangle \quad k = 1, 0, -1 \quad (11)$$

Pro stav $|\psi\rangle$ platí

$$|\psi(0)\rangle = |\chi_1\rangle = \frac{1}{2} |\phi_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi_0\rangle + \frac{1}{2} |\phi_{-1}\rangle \quad (12)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |\phi_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} |\phi_0\rangle + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-1} t} |\phi_{-1}\rangle \quad (13)$$

Pravděpodobnosti, že se částice nachází ve stavech $|\chi_1\rangle, |\chi_0\rangle, |\chi_{-1}\rangle$ jsou

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 \quad |\langle \chi_0 | \psi(t) \rangle|^2 \quad |\langle \chi_{-1} | \psi(t) \rangle|^2 \quad (14)$$

$$\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle \phi_1 | + \sqrt{2} \langle \phi_0 | + \langle \phi_{-1} | \right) \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} | \phi_1 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} | \phi_0 \rangle + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-1} t} | \phi_{-1} \rangle \right) \quad (15)$$

$$\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-1} t} \right) \quad (16)$$

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-1} t} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} + e^{\frac{i}{\hbar} E_0 t} + \frac{1}{2} e^{\frac{i}{\hbar} E_{-1} t} \right) \quad (17)$$

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} + \cos \frac{E_0 - E_1}{\hbar} t + \cos \frac{E_0 - E_{-1}}{\hbar} t + \frac{1}{2} \cos \frac{E_1 - E_{-1}}{\hbar} t \right] \quad (18)$$

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = -\frac{1}{4} \left[\left(1 - \cos \frac{E_0 - E_1}{\hbar} t \right) + \left(1 - \cos \frac{E_0 - E_{-1}}{\hbar} t \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{E_1 - E_{-1}}{\hbar} t \right) - 4 \right] \quad (19)$$

Zde použijeme vztah

$$1 - \cos 2x = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \quad (20)$$

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left[4 - 2 \sin^2 \frac{E_0 - E_1}{2\hbar} t - 2 \sin^2 \frac{E_0 - E_{-1}}{2\hbar} t - \sin^2 \frac{E_1 - E_{-1}}{2\hbar} t \right] \quad (21)$$

Po upravení dostaneme

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{E_0 - E_1}{2\hbar} t - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{E_0 - E_{-1}}{2\hbar} t - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{E_1 - E_{-1}}{2\hbar} t \quad (22)$$

Podobně spočítáme i zbylé dvě pravděpodobnosti

$$|\langle \chi_0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{E_1 - E_{-1}}{2\hbar} t \quad (23)$$

$$|\langle \chi_{-1} | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{E_0 - E_1}{2\hbar} t + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{E_0 - E_{-1}}{2\hbar} t - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{E_1 - E_{-1}}{2\hbar} t \quad (24)$$

Je vidět, že součet těchto tří pravděpodobností je roven 1. Do vztahů 22, 23 a 24 dosadíme vlastní hodnoty energie ze vztahů 10

$$|\langle \chi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = 1 - \sin^2 \frac{\mu B}{2\hbar} t - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\mu B}{\hbar} t \quad (25)$$

$$|\langle \chi_0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\mu B}{\hbar} t \quad (26)$$

$$|\langle \chi_{-1} | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2 \frac{\mu B}{2\hbar} t - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\mu B}{\hbar} t \quad (27)$$

1.2 Příklady ze sbírky doc. Mgr. Tomáše Tyce, Ph.D.

1.2.1 Příklad 14

Zadání Dokažte, že operátor parity definovaný vztahem $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ je hermitovský. Dále ukažte, že vlastní vektory odpovídající vlastním hodnotám 1 a -1 jsou ortogonální.

Moje řešení Pro libovolný operátor A platí

$$\left(\hat{A} | \psi(x) \rangle \right)^\dagger = \langle \psi(x) | \hat{A}^\dagger \quad (28)$$

Tedy pro operátor \hat{P}^\dagger platí

$$\left(\hat{P}^\dagger | \psi(x) \rangle \right)^\dagger = \langle \psi(x) | \hat{P} \quad (29)$$

Z definice operátoru parity

$$\langle \psi(x) | \hat{P} = \langle \psi(-x) | = (| \psi(-x) \rangle)^\dagger \quad (30)$$

Porovnáním těchto dvou rovnic získáme

$$\hat{P}^\dagger |\psi(x)\rangle = |\psi(-x)\rangle = \hat{P} |\psi(x)\rangle \quad (31)$$

Odtud

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P} \quad (32)$$

tj. operátor \hat{P} je hermitovský. Pro vlastní hodnoty λ operátoru \hat{P} platí

$$\lambda\psi(x) = \hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \quad (33)$$

$$\lambda\psi(-x) = \hat{P}\psi(-x) = \psi(x) \quad (34)$$

Z těchto dvou rovnic získáme $\lambda^2 = 1$, tedy $\lambda = \pm 1$. Po dosazení těchto hodnot do rovnice 33 získáme rovnice pro vlastní stavy ψ_1 a ψ_{-1}

$$\psi_1(x) = \hat{P}\psi_1(x) = \psi_1(-x) \quad (35)$$

$$-\psi_{-1}(x) = \hat{P}\psi_{-1}(x) = \psi_{-1}(-x) \quad (36)$$

tj. funkce ψ_1 je sudá a ψ_{-1} je lichá, tedy jejich skalární součin je roven nule a tyto funkce jsou ortogonální.

1.2.2 Příklad 24

Zadání Najděte vlnovou funkci $\psi_0(x)$ základního stavu harmonického oscilátoru z toho, že víte, že $\hat{a}\psi_0(x) = 0$. Anihilační operátor \hat{a} vyjádřete v souřadnicové reprezentaci a řešte vzniklou diferenciální rovnici např. metodou separace proměnných.

Moje řešení Vyjádříme anihilační operátor pomocí operátorů hybnosti a souřadnice

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \quad (37)$$

Nyní oba operátory vyjádříme v souřadnicové reprezentaci

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \hbar\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\frac{\partial}{\partial x} \quad (38)$$

Operátor \hat{a} působí na vlnovou funkci základního stavu harmonického oscilátoru

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\psi_0(x) + \hbar\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$-\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0(x) = \frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x} \quad (40)$$

odtud získáme

$$-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2} = \ln\psi_0(x) - \ln c \quad (41)$$

kde $-\ln c$ je integrační konstanta. Odtud získáme řešení ve tvaru

$$\psi_0(x) = ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (42)$$

Konstantu c určíme z normovací podmínky

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = c^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \quad (43)$$

Odtud

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (44)$$

1.3 Další příklady

1.3.1 Komutátor $[\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}]$

Zadání Spočítejte komutátor $[\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}]$ tak, aby se ve výsledku vyskytovaly pouze součiny nejvýše dvou operátorů \hat{a} , \hat{a}^\dagger . Využijte přitom komutační relaci $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Moje řešení

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}] &= \hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \\
 &= \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \\
 &= \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \\
 &= (\hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}) \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}) \\
 &= [\hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}] \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger [\hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}] \\
 &= [\hat{a}(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}] \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger [\hat{a}(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}]
 \end{aligned}$$

Zde využijeme komutační relace

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1 \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger 2}] &= (\hat{a} + \hat{a}) \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger (\hat{a} + \hat{a}) \\
 &= 2(\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a})
 \end{aligned}$$

1.3.2 Spin elektronu

Zadání Elektron se nachází ve stavu $|\psi\rangle = \alpha|z+\rangle + \beta|z-\rangle$ takovém, že střední hodnota průmětu spinu do osy z je rovna nule. (a) Najděte všechny dvojice čísel α , β , pro které má stav $|\psi\rangle$ uvedenou vlastnost. (b) S jakou pravděpodobností při měření průmětu spinu do osy x v tomto stavu $|\psi\rangle$ nalezneme hodnotu $+\frac{\hbar}{2}$? (c) Jaká může být v tomto stavu střední hodnota průmětu spinu do osy x ?
Užitečná informace: Operátory průmětů spinu v bázi $\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$ jsou

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

a vlastní stavy \hat{S}_x jsou $|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm |z-\rangle)$.

Moje řešení V bázi $\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$ platí

$$|z+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Z definice operátorů dle vztahu 46 získáme

$$\hat{S}_z |z+\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} |z+\rangle \quad (48)$$

$$\hat{S}_z |z-\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} |z-\rangle \quad (49)$$

$$\hat{S}_x |z+\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} |z-\rangle \quad (50)$$

$$\hat{S}_x |z-\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} |z+\rangle \quad (51)$$

(a) Z toho, že známe střední hodnotu operátoru \hat{S}_z , získáme

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \hat{S}_z \rangle \\
 &= \langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle \\
 &= (\alpha \langle z+ | + \beta \langle z- |) \hat{S}_z (\alpha |z+ \rangle + \beta |z- \rangle) \\
 &= \alpha^* \alpha \langle z+ | \hat{S}_z | z+ \rangle + \beta^* \beta \langle z- | \hat{S}_z | z- \rangle + \alpha^* \beta \langle z+ | \hat{S}_z | z- \rangle + \beta^* \alpha \langle z- | \hat{S}_z | z+ \rangle
 \end{aligned}$$

Zde použijeme rovnice 48 a 49

$$0 = |\alpha|^2 \frac{\hbar}{2} \langle z+ | z+ \rangle - |\beta|^2 \frac{\hbar}{2} \langle z- | z- \rangle - \alpha^* \beta \frac{\hbar}{2} \langle z+ | z- \rangle + \beta^* \alpha \frac{\hbar}{2} \langle z- | z+ \rangle$$

Zde využijeme ortogonalitu báze vektorů

$$\langle z+ | z+ \rangle = \langle z- | z- \rangle = 1 \quad \langle z+ | z- \rangle = \langle z- | z+ \rangle = 0 \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\hbar}{2} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \\
 0 &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\
 |\alpha|^2 &= |\beta|^2
 \end{aligned}$$

Absolutní hodnoty koeficientů α , β se rovnají, tedy komplexní čísla α a β se liší jen fází ϕ , tj.

$$\alpha = \beta e^{i\phi} \quad (53)$$

Z normovací podmínky navíc získáme

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = (\alpha \langle z+ | + \beta \langle z- |) (\alpha |z+ \rangle + \beta |z- \rangle) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \quad (54)$$

Odtud tedy

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2} \quad (55)$$

(b) Hledáme pravděpodobnost, s jakou se částice ve stavu $|\psi\rangle$ nachází ve stavu $|x+\rangle$, tj. $|\langle x+ | \psi \rangle|^2$.

$$|\langle x+ | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle z+ | + \langle z- |) (\alpha |z+ \rangle + \beta |z- \rangle) \right|^2$$

Po roznásobení a využití rovnic 52 získáme

$$\begin{aligned}
 |\langle x+ | \psi \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \beta (1 + e^{i\phi}) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} |\beta|^2 (1 + e^{i\phi}) (1 + e^{-i\phi}) \\
 &= \frac{1}{4} (2 + e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\
 &= \frac{1}{4} (2 + 2 \cos \phi) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \cos \phi) \\
 &= \cos^2 \frac{\phi}{2}
 \end{aligned}$$

(c) Podobně jako v bodě (a) upravíme střední hodnotu operátoru \hat{S}_x za využití vztahů 50 a 51

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_x \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_x | \psi \rangle \\
&= (\alpha \langle z+ | + \beta \langle z- |) \hat{S}_x (\alpha |z+\rangle + \beta |z-\rangle) \\
&= \alpha^* \alpha \langle z+ | \hat{S}_x |z+\rangle + \beta^* \beta \langle z- | \hat{S}_x |z-\rangle + \alpha^* \beta \langle z+ | \hat{S}_x |z-\rangle + \beta^* \alpha \langle z- | \hat{S}_x |z+\rangle \\
&= |\alpha|^2 \frac{\hbar}{2} \langle z+ |z-\rangle + |\beta|^2 \frac{\hbar}{2} \langle z- |z+\rangle + \alpha^* \beta \frac{\hbar}{2} \langle z+ |z+\rangle + \beta^* \alpha \frac{\hbar}{2} \langle z- |z-\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2} (\alpha^* \beta + \beta^* \alpha) \\
&= \frac{\hbar}{2} |\beta|^2 (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \\
&= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{2} (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \\
&= \frac{\hbar}{2} \cos \phi \quad \in \left[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2} \right]
\end{aligned}$$

1.3.3 Částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě

Zadání Uvažujme částici vázanou na interval $[0, L]$ osy x , tedy částici v nekonečně hluboké potenciálové jámě. V čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (56)$$

(jde tedy o superpozici stacionárních stavů s hodnotami energie $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ a $E_2 = 4E_1$). Určete pravděpodobnost, že souřadnice této částice leží v intervalu $\left[0, \frac{L}{2}\right]$, a to (a) v čase $t = 0$, (b) v čase $t = \frac{\pi \hbar}{E_1}$.

Moje řešení Platí

$$\psi_1(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad \psi_2(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{L} \quad \psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{L}} (\psi_1(x, 0) + \psi_2(x, 0)) \quad (57)$$

Pro časový vývoj stavů ψ_1 a ψ_2 platí

$$\psi_1(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \sin \frac{\pi x}{L} \quad \psi_2(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (58)$$

Odtud získáme časový vývoj stavu ψ

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} (\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \sin \frac{\pi x}{L} + e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (59)$$

Všechny výše uvedené vlnové funkce ψ_1 , ψ_2 a ψ jsou nulové na oblasti $(-\infty, 0) \cup (L, \infty)$ a jsou normované.

Pravděpodobnost, že se částice nachází na intervalu $\left[0, \frac{L}{2}\right]$ v čase t , je

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx \quad (60)$$

Pomocný výpočet Budeme potřebovat následující tři integrály

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \\
\text{substituce:} & \quad s = \frac{\pi x}{L} \quad ds = \frac{\pi}{L} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{L} \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 s \, ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2s) \, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} [s]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 2s}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \, dx \\
\text{substitute: } & s = \frac{2\pi x}{L} \quad ds = \frac{2\pi}{L} dx \\
I_2 &= \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 s \, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2s) \, ds \\
&= \frac{1}{4\pi} [s]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 2s}{2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} 2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \, dx \\
&= \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \, dx \\
\text{substitute: } & s = \sin \frac{\pi x}{L} \quad ds = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \, dx \\
I_3 &= \frac{4}{L} \frac{L}{\pi} \int s^2 \, ds \\
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{s^3}{3} \right] \\
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin^3 \frac{\pi x}{L}}{3} \right]_0^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$

(a) Počítáme integrál 60 v čase $t = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{L}{2}} \psi^*(x, 0) \psi(x, 0) \, dx &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{2\pi x}{L} \right)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\sin^2 \frac{\pi x}{L} + 2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} + \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \right) \, dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$

(b) Počítáme integrál 60 v čase $t = \frac{\pi\hbar}{E_1}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{L}{2}} \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx &= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} \sin \frac{\pi x}{L} + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \left(e^{\frac{i}{\hbar}E_1t} \sin \frac{\pi x}{L} + e^{\frac{i}{\hbar}E_2t} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) dx \\
&= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left[\sin^2 \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \right) + \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \right] dx \\
&= \frac{1}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\sin^2 \frac{\pi x}{L} + 2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{E_1 - E_2}{\hbar} t + \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3 \cos \frac{E_1 - E_2}{\hbar} t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \cos \frac{E_1 - E_2}{\hbar} t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \cos \frac{3E_1}{\hbar} \frac{\pi\hbar}{E_1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \cos 3\pi \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$